



Pregunta 1. (8 ptos.) Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < \left| \frac{x^2 - |x^2 - 4a^2|}{x - 4a} \right| < a$$

con a es un número real constante positivo ($a > 0$).

Solución: Primeramente, en lo que sigue, siempre estaremos considerando $x \neq 4a$ para garantizar que no estemos dividiendo por cero. Luego, dado que $x^2 - 4a^2 = (x + 2a)(x - 2a)$ entonces

$$|x^2 - 4a^2| = \begin{cases} x^2 - 4a^2 & , \text{ si } x \in (-\infty, -2a] \cup [2a, \infty) \\ -x^2 + 4a^2 & , \text{ si } x \in (-2a, 2a) \end{cases}$$

por lo que consideraremos los casos determinados en este valor absoluto.

Si $x \in (-\infty, -2a] \cup [2a, \infty) \setminus \{4a\}$ entonces

$$0 < \left| \frac{x^2 - |x^2 - 4a^2|}{x - 4a} \right| < a \iff 0 < \left| \frac{4a^2}{x - 4a} \right| < a \iff 4a < |x - 4a|$$

ya que $\left| \frac{4a^2}{x - 4a} \right| = \frac{|4a^2|}{|x - 4a|} = \frac{4a^2}{|x - 4a|}$ y tanto a como $|x - 4a|$ son positivos.
Como,

$$\begin{aligned} 4a < |x - 4a| &\iff x - 4a < -4a \quad \text{o} \quad 4a < x - 4a \\ &\iff x < 0 \quad \text{o} \quad 8a < x \end{aligned}$$

tenemos que los valores de x pertenecientes a

$$\left((-\infty, -2a] \cup [2a, \infty) \setminus \{4a\} \right) \cap \left((-\infty, 0) \cup (8a, \infty) \right) = (-\infty, -2a] \cup (8a, \infty)$$

satisfacen la inecuación.

Si $x \in (-2a, 2a)$ entonces

$$0 < \left| \frac{x^2 - |x^2 - 4a^2|}{x - 4a} \right| < a \iff 0 < \left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| < a$$

Dado que $\left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| \geq 0$, encontremos los valores de x tales que $\left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| = 0$ para excluirlos y así garantizar que $\left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| > 0$. Como,

$$0 = \left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| = \frac{|2x^2 - 4a^2|}{|x - 4a|} = 2 \frac{|x + \sqrt{2}a| |x - \sqrt{2}a|}{|x - 4a|}$$

tenemos que

$$0 = \left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| \iff x = -\sqrt{2}a \text{ o } x = \sqrt{2}a$$

y esos son los valores a excluir. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| < a &\iff -a < \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \quad \text{y} \quad \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} < a \\ &\iff 0 < \frac{2x^2 + ax - 8a^2}{x - 4a} \quad \text{y} \quad \frac{2x^2 - ax}{x - 4a} < 0 \end{aligned}$$

Como

$$2x^2 + ax - 8a^2 = 2 \left(x - \left(-1 - \sqrt{65} \right) a/4 \right) \left(x - \left(-1 + \sqrt{65} \right) a/4 \right)$$

y

$$2x^2 - ax = 2x(x - a/2)$$

el análisis de signos

	$(-\infty, -\frac{1-\sqrt{65}}{4}a]$	$(-\frac{1-\sqrt{65}}{4}a, -\frac{1+\sqrt{65}}{4}a)$	$[\frac{-1+\sqrt{65}}{4}a, 4a)$	$[4a, \infty)$
$\frac{2x^2 + ax - 8a^2}{x - 4a}$	+	-	+	+
$\frac{2x^2 - ax}{x - 4a}$	-	-	-	+

	$(-\infty, 0]$	$(0, a/2)$	$[a/2, 4a)$	$[4a, \infty)$
$\frac{2x^2 - ax}{x - 4a}$	+	-	+	+
$\frac{2x^2 - ax}{x - 4a}$	-	-	-	+

establece que

$$0 < \frac{2x^2 + ax - 8a^2}{x - 4a} \iff x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}a, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}a \right) \cup [4a, \infty)$$

y

$$\frac{2x^2 - ax}{x - 4a} < 0 \iff (-\infty, 0] \cup [a/2, 4a)$$

Luego,

$$\left| \frac{2x^2 - 4a^2}{x - 4a} \right| < a \iff x \in \left(\left(\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}a, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}a \right) \cup [4a, \infty) \right) \cap \left((-\infty, 0] \cup [a/2, 4a) \right)$$

$$\iff x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}a, 0 \right] \cup \left[a/2, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}a \right)$$

Así, tenemos que los valores de x pertenecientes a

$$\left((-2a, 2a) \cap \left(\left[\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}a, 0 \right] \cup \left[a/2, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}a \right) \right) \right) \setminus \{ -\sqrt{2}a, \sqrt{2}a \}$$

$$= \left(-2a, -\sqrt{2}a \right) \cup \left(-\sqrt{2}a, 0 \right] \cup \left[a/2, \sqrt{2}a \right) \cup \left(\sqrt{2}a, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}a \right)$$

también satisfacen la inecuación.

Uniendo las soluciones obtenidas en los dos casos que hemos considerado, obtenemos que los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < \left| \frac{x^2 - |x^2 - 4a^2|}{x - 4a} \right| < a$$

son los que pertenecen al conjunto

$$(-\infty, -\sqrt{2}a) \cup \left(-\sqrt{2}a, 0 \right] \cup \left[a/2, \sqrt{2}a \right) \cup \left(\sqrt{2}a, \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}a \right) \cup (8a, \infty)$$

para cualquier valor de la constante positiva a .

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $8x - 4y + 9 = 0$ y que pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(2, 2)$.

Solución: Denotemos al centro de la circunferencia por (C_x, C_y) . Como el centro está sobre la recta $8x - 4y + 9 = 0$, tenemos que sus coordenadas cumplen la relación

$$8C_x - 4C_y + 9 = 0.$$

Por otra parte, si denotamos al radio de la circunferencia por r , tenemos que su ecuación viene dada por

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2.$$

Como los puntos $A(1, -3)$ y $B(2, 2)$ pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas cumplen la relación dada por la ecuación de la circunferencia. Luego,

$$(1 - C_x)^2 + (-3 - C_y)^2 = r^2 \quad \text{y} \quad (2 - C_x)^2 + (2 - C_y)^2 = r^2$$

de donde se obtiene que

$$1 + C_x + 5C_y = 0$$

después de simplificar la ecuación $(1 - C_x)^2 + (-3 - C_y)^2 = (2 - C_x)^2 + (2 - C_y)^2$.

Tenemos entonces que el centro de la circunferencia es el punto donde se intersectan las rectas $8x - 4y + 9 = 0$ y $1 + x + 5y = 0$. Luego, resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen las coordenadas del centro.

$$\begin{cases} 8C_x - 4C_y + 9 = 0 \\ 1 + C_x + 5C_y = 0 \end{cases} \implies (C_x, C_y) = (-49/44, 1/44)$$

El cuadrado del radio se puede obtener reemplazando las coordenadas del centro y las de cualquier punto perteneciente a la circunferencia en su ecuación. Así, $r^2 = 13169/968$. Finalmente, la ecuación de la circunferencia deseada es

$$(x + 49/44)^2 + (y - 1/44)^2 = 13169/968$$

o, equivalentemente,

$$22x^2 + 49x + 22y^2 + y - 272 = 0.$$

Pregunta 3. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \text{ si } x > 6 \\ 1 & , \text{ si } 22/7 \leq x \leq 6 \\ -(x - 2)^2 & , \text{ si } x < 22/7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = |2x - 3| - |x + 1|$$

- (2 ptos.) Haga un bosquejo del gráfico de la función f ;
- (1 ptos.) Haga un bosquejo del gráfico de la función g ;
- (6 ptos.) Determine $f \circ g$.

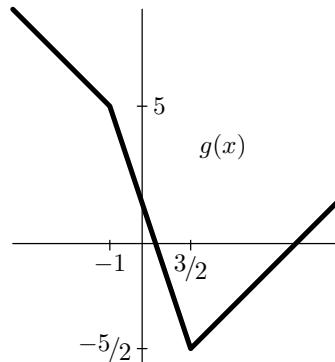
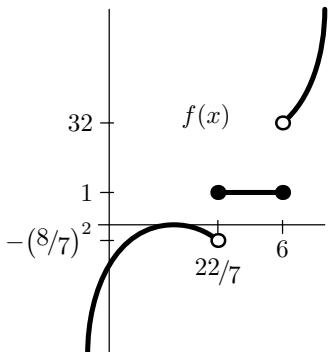
Solución: Usando que

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & , \text{ si } x \geq 3/2 \\ -(2x - 3) & , \text{ si } x < 3/2 \end{cases} \quad \text{y} \quad |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & , \text{ si } x \geq -1 \\ -(x + 1) & , \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

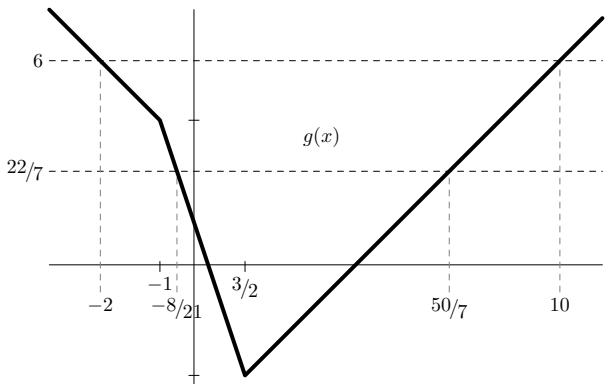
podemos reescribir la expresión de la función g como

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & , \text{ si } x \geq 3/2 \\ -3x + 2 & , \text{ si } -1 \leq x < 3/2 \\ -x + 4 & , \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

Los bosquejos de las funciones f y g son:



Apoyándonos en el gráfico de la función g , podemos determinar las regiones donde las imágenes de g caen en los intervalos que determinan distintas expresiones de la función f .



Así,

$$g(x) > 6 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (10, \infty)$$

$$22/7 \leq g(x) \leq 6 \iff x \in [-2, -8/21] \cup [50/7, 10]$$

$$g(x) < 22/7 \iff x \in (-8/21, 50/7)$$

Luego,

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x - 6)(x - 2) & , \text{ si } x \in (-\infty, -2) \cup (10, \infty) \\ 1 & , \text{ si } x \in [-2, -8/21] \cup [50/7, 10] \\ -9x^2 & , \text{ si } x \in (-8/21, 3/2) \\ -(x - 6)^2 & , \text{ si } x \in [3/2, 50/7) \end{cases}$$

habiendo simplificado las expresiones.